

Étude numérique de l'écoulement de fluides à seuil dans un réseau arborescent profond

Stéphane Munier^(a), Alberto Rosso^(b)

(a) CPHT, CNRS, École polytechnique, Institut Polytechnique de Paris, 91120 Palaiseau, France

(b) LPTMS, CNRS, Université Paris-Saclay, 91405 Orsay, France

Résumé

La compréhension de la dynamique d'écoulement des fluides dits "à seuil" dans les milieux poreux constitue un défi important en mécanique des fluides. Les études expérimentales et les simulations numériques révèlent une relation non linéaire entre le débit et le gradient de pression, qui s'écarte de la loi classique de Darcy. Dans ce travail, nous avons étudié numériquement une structure poreuse modélisable par un réseau aléatoire en arbre. Nous avons adapté un algorithme introduit récemment, basé sur la décomposition spinale des marches aléatoires branchantes, afin de simuler de manière exacte le sous-réseau dans lequel le fluide circule pour une pression donnée. Cette approche nous a permis de calculer la relation débit–pression dans des arbres comportant plusieurs milliers de niveaux. Nos résultats corroborent des prédictions asymptotiques déjà connues, mais jusqu'ici uniquement validées pour des arbres relativement petits, d'environ 20 niveaux.

Contexte et motivation : loi de Darcy généralisée aux fluides non newtoniens

L'écoulement de fluides dans les milieux poreux désordonnés constitue un problème classique de mécanique des fluides. Considérons un conduit rempli d'un milieu poreux et appliquons une chute de pression ΔP entre ses extrémités. Dans le cas d'un fluide newtonien, le débit Q est proportionnel à ΔP : c'est la loi de Darcy [1]. Cependant, de nombreux fluides courants (comme le dentifrice par exemple!) se comportent comme des *fluides à seuil* ("yield-stress fluids"), non-newtoniens. Ils restent solides tant que la contrainte locale demeure inférieure à un seuil critique. Ce comportement modifie profondément la loi d'écoulement macroscopique dans un milieu poreux : on observe l'émergence d'un *seuil de pression global*, au-delà duquel s'établit un régime où Q dépend *non linéairement* de ΔP . Ce n'est qu'à haute pression que la croissance de Q redevient proportionnelle à celle de ΔP .

Comprendre quantitativement la loi de Darcy modifiée pour un fluide à seuil s'écoulant dans un milieu poreux désordonné demeure un défi. Un cadre naturel consiste à modéliser un tel milieu par un graphe dont chaque nœud représente un pore et chaque arête un lien inter-pore ("throat"). On impose alors une loi locale affine dans chaque throat :

$$Q(\Delta P) = \kappa(\Delta P - \tau) \quad \text{pour } \Delta P > \tau, \quad Q = 0 \quad \text{pour } \Delta P < \tau,$$

où κ est une perméabilité effective et τ un seuil caractéristiques du throat considéré et, a priori, du fluide. En dehors de réseaux élémentaires constitués de faisceaux indépendants de throats, les modèles ainsi définis ne sont pas résolus analytiquement.

Récemment, une conjecture a été formulée dans le cas particulier — mais pertinent et non trivial — d'un réseau en arbre (voir la figure 1), muni de seuils τ aléatoires indépendamment tirés d'une distribution prescrite et d'une perméabilité homogène κ sur l'ensemble de l'arbre. Cette conjecture concerne la physique régissant la partie basse pression du régime non linéaire. Elle peut se reformuler qualitativement de la manière suivante : *les canaux s'ouvrent dans l'ordre croissant des sommes des seuils locaux τ le long de chacun d'eux, mais avec une sélection privilégiant ceux dont l'overlap mutuel est faible.* [2].

Cette conjecture établit une correspondance effective entre ce problème hydraulique et celui du polymère dirigé dans l'approximation du "random energy model" (REM) [3]. Elle permet ainsi de déduire certaines propriétés quantitatives de l'écoulement en s'appuyant sur les résultats connus pour la distribution des

énergies minimales dans le REM. Par exemple, le débit moyen (moyenné sur le désordre) traversant un arbre de profondeur T prend la forme suivante [2] :

$$\langle Q_T(\Delta P \equiv P_0 + x) \rangle = \frac{e^{\beta_c x} - 1}{\beta_c T}, \quad (1)$$

où P_0 désigne le seuil global de pression pour une réalisation donnée du désordre, sur lequel on effectue ensuite la moyenne, et où la constante β_c dépend uniquement de la loi des seuils τ . On s’attend à ce que cette formule soit valide pour des pressions modérées (typiquement $\beta_c x \ll \ln T$).

Des simulations numériques ont été réalisées afin d’évaluer la validité de cette conjecture. Les résultats obtenus se sont révélés compatibles avec la formule ci-dessus. Toutefois, les profondeurs d’arbre accessibles numériquement étaient limitées à environ $T \simeq 20$. Une confirmation décisive de la formule nécessite d’explorer des profondeurs nettement plus grandes : en effet, on s’attend à ce que la formule (1) décrive correctement le comportement de l’arbre pour des pressions petites devant $\ln T$. Tester cette prédiction pour des pressions significatives exige donc de pouvoir générer des arbres de taille exponentiellement grande.

Méthodologie et résultats

Simuler explicitement des arbres binaires complets comportant plusieurs centaines — voire milliers — de générations est en pratique impossible. Nous sommes cependant parvenus [4] à tester la formule (1) en adaptant un algorithme introduit dans la référence [5], qui permet de simuler génériquement et *de manière exacte* le bord des marches aléatoires branchantes, c’est-à-dire la zone pertinente où se trouvent les chemins minimaux, sans avoir à générer l’arbre dans son intégralité. Cette approche réduit drastiquement la complexité et rend possible l’étude de profondeurs jusqu’ici inaccessibles.

Les simulations menées sur des profondeurs allant jusqu’à plusieurs milliers de générations valident de manière très nette la formule (1) conjecturée (voir la figure 2).

Au-delà de la confirmation de cette formule et donc de l’image physique sous-jacente, notre étude a permis de mieux comprendre la dynamique d’ouverture des canaux actifs.

Perspectives

Le travail [4] constitue un jalon vers une compréhension complète de la loi de Darcy généralisée aux fluides non-newtoniens dans les milieux poreux désordonnés.

En confirmant que le régime non-linéaire peut être interprété à partir d’une analogie avec le REM, nous renforçons la motivation en faveur d’une démonstration rigoureuse de cette conjecture.

Par ailleurs, l’outil numérique que nous avons développé permettra d’explorer d’autres régimes encore mal compris, tels que la transition entre le régime non linéaire à pression modérée et le régime linéaire de très haute pression.

Références

- [1] H. Darcy, *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : Exposition et application des principes à suivre et des formules à employer dans les questions de distribution d’eau*. Victor Dalmont, Libraire des Corps impériaux des ponts et chaussées et des mines, 1856.
- [2] V. M. Schimmenti, F. Lanza, A. Hansen, S. Franz, A. Rosso, L. Talon, and A. De Luca, “Darcy’s law of yield stress fluids on a treelike network,” *Phys. Rev. E*, vol. 108, p. L023102, Aug 2023.
- [3] B. Derrida, “Random-energy model : An exactly solvable model of disordered systems,” *Physical Review B*, vol. 24, no. 5, pp. 2613–2626, 1981.
- [4] S. Munier and A. Rosso, *J. Stat. Mech.* (2025) no.1, 013301 [arXiv :2409.03480 [cond-mat.dis-nn]].
- [5] E. Brunet, A. D. Le, A. H. Mueller, and S. Munier, “How to generate the tip of branching random walks evolved to large times,” *EPL*, vol. 131, no. 4, p. 40002, 2020.

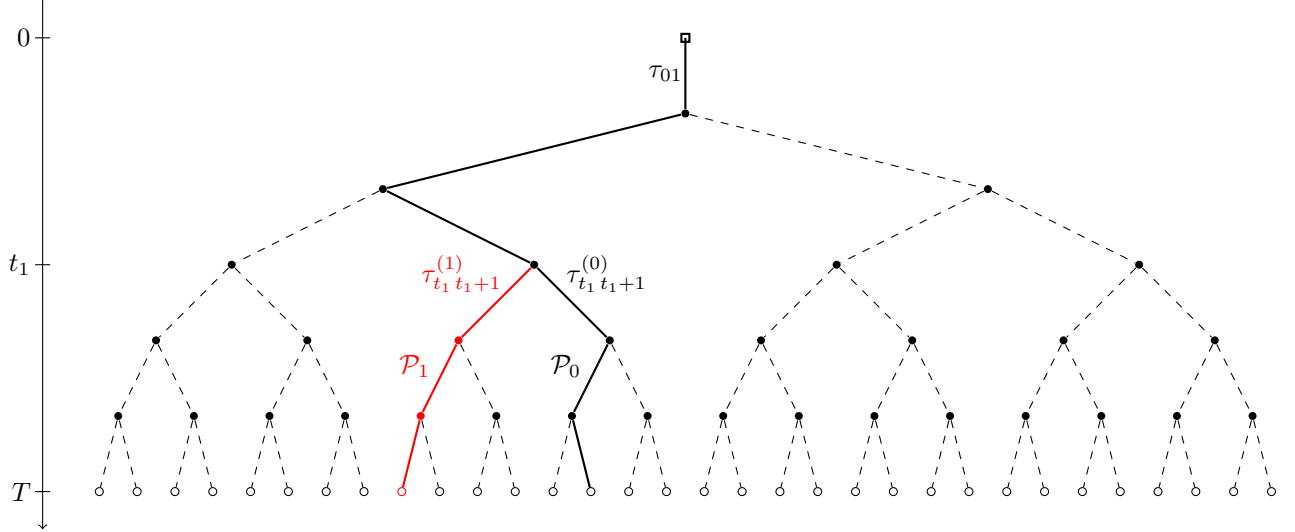


FIGURE 1 – (Figure empruntée à la publication [4]). Réseau en arbre constitué de pores et de “throats” (ou de configurations de polymères dirigés) de hauteur $T = 6$. Les arêtes représentent les “throats” (ou les liaisons entre monomères), chacun étant caractérisé par un seuil aléatoire de différence de pression (ou d’énergie) τ . Nous avons mis en évidence deux canaux (ou configurations), \mathcal{P}_0 et \mathcal{P}_1 , d’overlap t_1 (lignes pleines). Dans une réalisation particulière du désordre, ce sont les premiers canaux à s’ouvrir lorsque la pression appliquée à l’entrée – marquée par un carré – augmente.

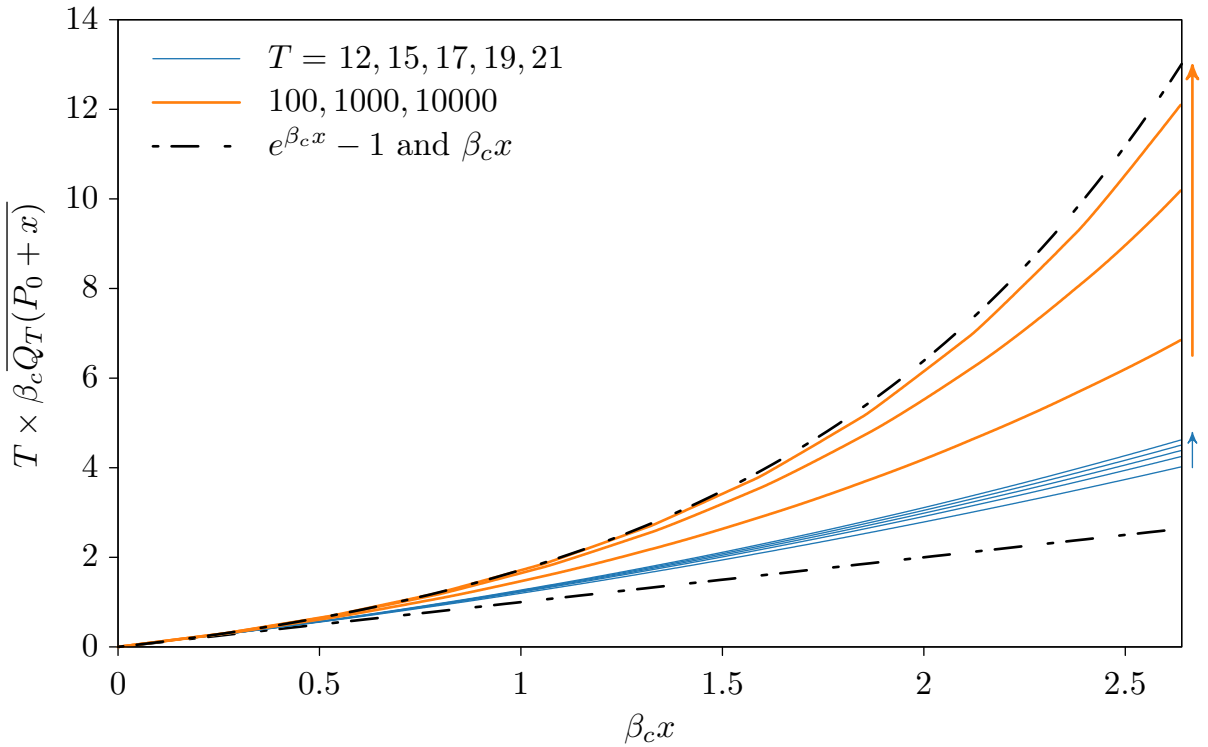


FIGURE 2 – (Figure empruntée à la publication [4]). Débit moyen pour des pressions appliquées modérées. La moyenne est effectuée sur 10^5 réalisations du réseau pour $T \leq 1000$, et sur 10^4 réalisations pour $T = 10000$. Dans cette figure, les flèches sur le côté droit indiquent la direction d’augmentation de T . On voit notamment la très bonne adéquation des calculs numériques à grand T avec la formule (1) (courbe point-tiret supérieure), ainsi que l’amélioration qualitative qui permet notre approche (courbes oranges) [4] par rapport aux résultats numériques obtenus précédemment (faisceau de courbes bleues) [2].